Dipartimento di Matematica per le scienze economiche e sociali Università di Bologna

Matematica aa 2008-2009

lezione 14 6 febbraio 2009

professor Daniele Ritelli

www.unibo.it/docenti/daniele.ritelli

Teorema Siano (x_n) e (y_n) non negative e tali per cui esista finito e diverso da zero, il:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}.$$

Allora

a) se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge, converge anche $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

b) se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge, allora diverge anche $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

Applicazione Dimostriamo la convergenza della serie di Euler:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad (\zeta(2))$$

Applicazione Dimostriamo la convergenza della serie di Euler:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tag{$\zeta(2)$}$$

sfruttando il fatto che converge la serie (di Mengoli):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \tag{M}$$

Applicazione Dimostriamo la convergenza della serie di Euler:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad (\zeta(2))$$

sfruttando il fatto che converge la serie (di Mengoli):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad (\mathrm{M})$$

se si prova la convergenza della serie di Mengoli, la nostra affermazione è diretta conseguenza del teorema appena enunciato, essendo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1$$

Dimostriamo per induzione la formula

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}. \qquad (\clubsuit)$$

Dimostriamo per induzione la formula

$$\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}}. \qquad (\clubsuit)$$

($\clubsuit$) è verificata per $n = 1$

Dimostriamo per induzione la formula

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}. \qquad (\clubsuit)$$

($\clubsuit$) è verificata per $n = 1$ La sommatoria a primo membro di ($\clubsuit$) ha un solo termine:

$$\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}.$$

Dimostriamo per induzione la formula

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.} \qquad (\clubsuit)$$

($\clubsuit$) è verificata per $n = 1$ La sommatoria a primo membro di ($\clubsuit$) ha un solo termine:

$$\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}.$$

D'altra parte il secondo membro di ($\clubsuit$) valutato per $n = 1$ porge:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Supponiamo ora che ($\clubsuit$) sia soddisfatta per un naturale m e proviamo che la formula ($\clubsuit$) vale anche per $m + 1$

Supponiamo ora che (♣) sia soddisfatta per un naturale m e proviamo che la formula (♣) vale anche per $m+1$

$$\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{m}+1} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})} = \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{m}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})} + \frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{m}+\mathbf{1})(\boldsymbol{m}+\mathbf{2})}$$

Supponiamo ora che $(\clubsuit)$ sia soddisfatta per un naturale m e proviamo che la formula $(\clubsuit)$ vale anche per $m+1$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

Sfruttando l'ipotesi induttiva, abbiamo:

Supponiamo ora che (♣) sia soddisfatta per un naturale m e proviamo che la formula (♣) vale anche per $m+1$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

Sfruttando l'ipotesi induttiva, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

Supponiamo ora che ($\clubsuit$) sia soddisfatta per un naturale m e proviamo che la formula ($\clubsuit$) vale anche per $m+1$

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

Sfruttando l'ipotesi induttiva, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$

e, svolgendo i calcoli a secondo membro troviamo:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{m+1}\left(m + \frac{1}{m+2}\right) \\
&= \frac{1}{m+1}\,\frac{m^2+2m+1}{m+2} \\
&= \frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)} \\
&= \frac{m+1}{m+2}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{1}{m+1}\left(m + \frac{1}{m+2}\right) \\
&= \frac{1}{m+1}\,\frac{m^2+2m+1}{m+2} \\
&= \frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)} \\
&= \frac{m+1}{m+2}.
\end{aligned}
$$

Dunque (♣) è soddisfatta anche per $m+1$, il che per il principio di induzione prova che la formula è valida per tutti i naturali. z

Conclusione: la serie di Mengoli è convergente e la sua somma vale 1

Conclusione: la serie di Mengoli è convergente e la sua somma vale 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$$

Criterio del rapporto

Criterio del rapporto

Teorema Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \boldsymbol{a_n}$, in cui $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se esiste:

$$\lim_{\boldsymbol{n\to\infty}} \frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}} = \boldsymbol{\ell}$$

allora:

Criterio del rapporto

Teorema Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n}$, in cui $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se esiste:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}} = \boldsymbol{\ell}$$

allora:

a) se $\ell < 1$ la serie converge;

Criterio del rapporto

Teorema Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n}$, in cui $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se esiste:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}} = \boldsymbol{\ell}$$

allora:

a) se $\ell < 1$ la serie converge;

b) se $\ell > 1$, la serie diverge.

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

converge

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

converge

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Applicazione

$$\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n!}}$$

converge

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}$$

Applicazione

$$\sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n!}}$$

converge

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

converge

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

converge

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

converge

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{n+1}{2^{(n+1)}}}{\dfrac{n}{2^n}}$$

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

converge

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{n+1}{2^{(n+1)}}}{\dfrac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$$

Criterio della radice

Criterio della radice

Teorema Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n}$, in cui $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se esiste:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

allora:

Criterio della radice

Teorema Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n}$, in cui $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se esiste:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

allora:

a) se $\ell < 1$ la serie converge;

Criterio della radice

Teorema Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{a_n}$, in cui $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se esiste:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$$

allora:

a) se $\ell < 1$ la serie converge;

b) se $\ell > 1$, la serie diverge.

Dovesse accadere che uno dei criteri, radice o rapporto, sia inefficace, nel senso che uno dei due limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

valga 1 è inutile tentare di calcolare l'altro limite, si può dimostrare, usando le regole di Cesàro, che se uno dei due limiti esiste, esiste anche l'altro limite e i due limiti sono eguali. Quindi se fallisce uno dei due criteri, di radice o rapporto, non serve tentare di usare l'altro.

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$$

converge

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$$

converge

$$\sqrt[n]{a_n}$$

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$$

converge

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^{n^2}}}$$

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}$$

converge

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^{n^2}}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2^n} \to 0$$

Criterio di Raabe

Criterio di Raabe

Teorema Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, in cui $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se esiste:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \ell$$

allora:

Criterio di Raabe

Teorema Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, in cui $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se esiste:

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \ell$$

allora:

a) se $\ell > 1$ la serie converge;

Criterio di Raabe

Teorema Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, in cui $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se esiste:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \ell$$

allora:

a) se $\ell > 1$ la serie converge;

b) se $\ell < 1$, la serie diverge.

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

converge

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1\right)$$

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}}$$

converge

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1\right) = \frac{1}{n} + 2 \to 2$$

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

Applicazione

$$\sum_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1}}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$$

diverge

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - 1\right)$$

Applicazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

diverge

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - 1\right) = \frac{n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}} \to \frac{1}{2}$$

Serie armonica generalizzata Se $\alpha > 0$ è la serie così definita

Serie armonica generalizzata Se $\alpha > 0$ è la serie così definita

$$\boldsymbol{\zeta(\alpha)} = \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Serie armonica generalizzata Se $\alpha > 0$ è la serie così definita

$$\boldsymbol{\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

a) se $\alpha > 1$, $\zeta(\alpha)$ converge;

Serie armonica generalizzata Se $\alpha > 0$ è la serie così definita

$$\boldsymbol{\zeta(\alpha)} = \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

a) se $\alpha > 1$, $\zeta(\alpha)$ converge;

b) se $\alpha \leq 1$, $\zeta(\alpha)$ diverge.

Serie armonica generalizzata Se $\alpha > 0$ è la serie così definita

$$\zeta(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

a) se $\alpha > 1$, $\zeta(\alpha)$ converge;

b) se $\alpha \leq 1$, $\zeta(\alpha)$ diverge.

Euler ha dimostrato che

$$\zeta(\mathbf{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{n^{\mathbf{2}}} = \frac{\pi^{\mathbf{2}}}{\mathbf{6}}$$